

**Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów szkół podstawowych od klas IV
województwa pomorskiego, rok szkolny 2018/2019**

Etap III - wojewódzki

W kluczu przedstawiono przykładowe rozwiązania oraz prawidłowe odpowiedzi.

Za każdą inną poprawną metodę rozwiązania zadania uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.

Tytuł laureata otrzymuje uczeń, który uzyskał co najmniej 16 punktów.

Tytuł finalisty otrzymuje uczeń, który uzyskał co najmniej 6 punktów i mniej niż 16.

Zadanie 1 [0 – 1] Wiedząc, że $\frac{a}{a+b} = 2019$, oblicz $\frac{b}{a}$.

Przykładowe rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} &= 2019 \\ a &= 2019a + 2019b \\ b &= -\frac{2018}{2019}a \\ \frac{b}{a} &= -\frac{2018}{2019}\end{aligned}$$

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkty, gdy:

- poprawnie obliczy wartość wyrażenia $\frac{b}{a} = -\frac{2018}{2019}$.

Zadanie 2 [0 – 2] Jeden z boków trójkąta prostokątnego ma długość a . Bok ten jest o tyle dłuższy od boku najkrótszego, o ile jest krótszy od boku najdłuższego. Wyznacz, w zależności od a , pole tego trójkąta.

Przykładowe rozwiązanie:

a – długość dłuższej przyprostokątnej

$a + x$ – długość przeciwprostokątnej

$a - x$ – długość krótszej przyprostokątnej

$$\begin{aligned}a^2 + (a - x)^2 &= (a + x)^2 \\ a^2 + a^2 - 2ax + x^2 &= a^2 + 2ax + x^2 \\ a^2 &= 4ax \\ x &= \frac{1}{4}a \\ P &= \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{8}a^2\end{aligned}$$

Odpowiedź: Pole trójkąta jest równe $\frac{3}{8}a^2$.

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- poprawnie wyznaczy zależność pomiędzy x i a , tzn. zależność pomiędzy różnicą długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej a dłuższą przyprostokątną.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- poprawnie wyznaczy pole trójkąta.

Zadanie 3 [0 – 2] Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest o 30% mniejsza od większej z tych liczb. Oblicz, o ile procent średnia ta jest większa od mniejszej z tych liczb.

Przykładowe rozwiązanie:

a – mniejsza liczba

b – większa liczba

$$\frac{a+b}{2} = 0,7b$$

$$a+b = 1,4b$$

$$a = 0,4b$$

$$b = \frac{5}{2}a$$

$$\frac{a+b}{2} = 0,7b = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{2}a = \frac{7}{4}a = 175\%a$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna jest o 75% większa od mniejszej z tych liczb.

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- zapisze jedną liczbę w zależności od drugiej.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- poprawnie obliczy, o ile procent średnia arytmetyczna jest większa od mniejszej liczby.

Zadanie 4 [0 – 2]

Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{-32^4 \cdot (-4)^0 \cdot 5^5}{4^8 \cdot 10^4} + \left[\left(-\frac{1}{6} \right)^5 \cdot 6^6 \right]^3$$

Przykładowe rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \frac{-32^4 \cdot (-4)^0 \cdot 5^5}{4^8 \cdot 10^4} + \left[\left(-\frac{1}{6} \right)^5 \cdot 6^6 \right]^3 &= \frac{-(2^5)^4 \cdot 1 \cdot 5^5}{(2^2)^8 \cdot (2 \cdot 5)^4} + \left[-\left(\frac{1}{6} \right)^5 \cdot 6^6 \right]^3 = \\ &= -\frac{2^{20} \cdot 5^5}{2^{16+4} \cdot 5^4} + \left[-\frac{1}{6^5} \cdot 6^6 \right]^3 = -5 + (-6^{6-5})^3 = -5 - 216 = -221 \end{aligned}$$

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- zastosuje poprawną metodę obliczenia wartości wyrażenia (poprawnie obliczy wartości wszystkich potęg, zastosuje prawidłową kolejność i metodę wykonywania działań), ale popełni jeden błąd rachunkowy.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- poprawnie obliczy wartość wyrażenia.

Zadanie 5 [0 – 2]

Ile razy w ciągu doby na zegarku elektronicznym, mierzącym czas w skali 24-godzinnej, pojawia się taki czas, że liczba wskazująca godziny i liczba wskazująca minuty są jednocześnie liczbami pierwszymi?

Uwaga: Gdy na zegarze pojawia się wskazanie, na przykład 01, to traktujemy je jako liczbę 1.

Przykładowe rozwiązanie:

Wśród liczb wskazujących na zegarku minuty, czyli wśród liczb od 0 do 59, jest 17 liczb pierwszych. Liczbami tymi są: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 i 59. Wśród liczb wskazujących godziny, czyli wśród liczb od 0 do 23, jest 9 liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Dla każdej z tych 9 liczb pierwszych wskazujących godzinę, istnieje 17 wskazań liczby minut, która jest także liczbą pierwszą. Łącznie mamy $9 \cdot 17$, czyli 153 wskazania zegara.

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- Poprawnie poda ile jest liczb pierwszych od 0 do 59 i od 0 do 23.

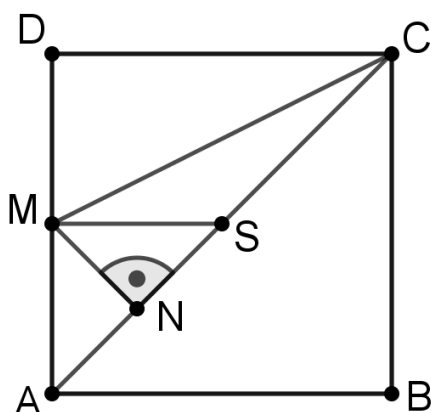
Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- Poda poprawną liczbę wszystkich wskazań zegara.

Zadanie 6 [0 – 2]

Wyznacz stosunek pola trójkąta MNC do pola kwadratu $ABCD$, gdzie M jest środkiem boku AD , punkt N leży na przekątnej AC i odcinek MN jest prostopadły do AC .

Przykładowe rozwiązanie:



Oznaczmy przez S środek odcinka AC .

Wtedy N jest środkiem odcinka AS .

$$|NC| = \frac{3}{4}|AC|$$

$$P_{\Delta MNC} = \frac{3}{4}P_{\Delta MAC}$$

$$|MA| = \frac{1}{2}|DA|$$

$$P_{\Delta MAC} = \frac{1}{2}P_{\Delta DAC} = \frac{1}{4}P_{ABCD}$$

$$P_{\Delta MNC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}P_{ABCD} = \frac{3}{16}P_{ABCD}$$

Odpowiedź:

Stosunek pola trójkąta MNC do pola kwadratu $ABCD$ wynosi $\frac{3}{16}$.

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- Zauważy, że pole trójkąta MNC jest równe 0,75 pola trójkąta MAC .

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- Poprawnie wyznaczy stosunek pola trójkąta MNC do pola kwadratu $ABCD$.

Zadanie 7 [0 – 1]

Znajdź ostatnią cyfrę liczby:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 999^3.$$

Przykładowe rozwiązanie:Zauważmy, że składniki $10^3, 20^3, \dots, 990^3$ nie mają wpływu na ostatnią cyfrę. Ostatnia cyfra liczby

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3$$

jest taka sama, jak ostatnie cyfry liczb

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + \dots + 19^3,$$

$$21^3 + 22^3 + 23^3 + \dots + 29^3,$$

...

$$991^3 + 992^3 + 993^3 + \dots + 999^3.$$

Oznacza to, że $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 999^3$ ma ostatnią cyfrę taką, jak liczba

$$100 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3),$$

czyli równą zero.

Kryteria oceniania**Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:**Poprawnie wyznaczy ostatnią cyfrę liczby $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 999^3$ **Zadanie 8 [0 – 4]**

W poniższych zadaniach zamkniętych dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna. Wskaż tę odpowiedź otaczając ją kółkiem.

1. W pewnych zawodach liczba wszystkich uczestników zwiększyła się w stosunku do roku ubiegłego o 32%. W roku ubiegłym liczba dziewcząt uczestniczących w tych zawodach stanowiła 55% liczby wszystkich zawodników, a w tym roku liczba dziewcząt stanowiła 50% wszystkich zawodników. W porównaniu z rokiem ubiegłym liczba dziewcząt

A. zmniejszyła się o 5%	B. zwiększyła się o 32%	C. zwiększyła się o 11%	<input checked="" type="radio"/> D. zwiększyła się o 20%
-------------------------	-------------------------	-------------------------	--

2. Wartość wyrażenia $|1 - 2\sqrt{2}| - |-3 - \sqrt{8}|$ jest równa

A. 4	<input checked="" type="radio"/> B. -4	C. 2	D. $4\sqrt{2} + 2$
------	--	------	--------------------

3. Objętość czworościanu foremnego o powierzchni całkowitej równej $\sqrt{3}$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$	<input checked="" type="radio"/> B. $\frac{1}{12}\sqrt{2}$	C. $\frac{\sqrt{11}}{24}$	D. $\frac{1}{6}$
-------------------------	--	---------------------------	------------------

4. Liczba $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2017 - 2018 + 2019$ jest równa

A. 0	B. 1009	<input checked="" type="radio"/> C. 1010	D. 2019
------	---------	--	---------

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- udzieli jednej poprawnej odpowiedzi.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- udzieli dwóch poprawnych odpowiedzi.

Uczeń otrzymuje 3 punkty, gdy:

- udzieli trzech poprawnych odpowiedzi.

Uczeń otrzymuje 4 punkty, gdy:

- udzieli czterech poprawnych odpowiedzi.

Zadanie 9 [0 - 4]

Oceń prawdziwość zdań. Otocz kółkiem P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Jadąc z prędkością $36 \frac{km}{h}$ pokonujemy w czasie 1 sekundy 10 metrów.	<input checked="" type="radio"/> P	<input type="radio"/> F
W każdym trapezie suma miar dowolnych dwóch jego kątów wewnętrznych jest równa 180° .	<input type="radio"/> P	<input checked="" type="radio"/> F
Bok kwadratu o polu 18 ma długość $3\sqrt{2}$.	<input checked="" type="radio"/> P	<input type="radio"/> F
Liczba $a = -3 - \sqrt[3]{-30}$ jest ujemna.	<input type="radio"/> P	<input checked="" type="radio"/> F
W trójkącie ABC oznaczono literą D środek boku BC . Pola trójkątów ABD i ADC są równe.	<input checked="" type="radio"/> P	<input type="radio"/> F

Kryteria oceniania

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy:

- udzieli dwóch poprawnych odpowiedzi.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy:

- udzieli trzech poprawnych odpowiedzi.

Uczeń otrzymuje 3 punkty, gdy:

- udzieli czterech poprawnych odpowiedzi.

Uczeń otrzymuje 4 punkty, gdy:

- udzieli pięciu poprawnych odpowiedzi.