III WOJEWÓDZKI KONKURS Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH

Klucz odpowiedzi i kryteria punktowania zadań

III ETAP - WOJEWÓDZKI

2 marca 2019 r., godz. 10.00

Liczba punktów możliwych do uzyskania: 40

Zasady ogólne:

1. Za każde poprawne rozwiązanie zadania otwartego inne niż w kluczu, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo polecenia typu *oblicz* nie przedstawił żadnych obliczeń, a napisał poprawną odpowiedź, to nie przyznajemy punktu za rozwiązanie zadania.
3. Jeżeli uczeń w zadaniach zamkniętych, zaznaczył zarówno poprawą jak i błędną odpowiedź (lub błędne odpowiedzi), nie przyznajemy punktu.
4. Jeżeli w zadaniu otwartym jest polecenie typu *Zapisz obliczenia i odpowiedź*, to oznacza, że uczeń przedstawi swoje rozumowanie i sformułuje odpowiedź lub poda ją w inny jednoznaczny sposób, np. podkreśli, zakreśli kółkiem.
5. Punkty przyznajemy zgodnie z kryteriami punktowania, nie wolno dzielić punktów.
6. Brudnopisy zamieszczone pod zadaniami 1-8 oraz na końcu pracy nie podlegają sprawdzeniu.

Zadania zamknięte

1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	B	D	B	PFP	FPP	PPP

Zadania otwarte

Zadanie 9. (0-6)

Kilogram cukierków czekoladowych kosztuje 26 zł, a kilogram cukierków owocowych kosztuje 18 zł. Sprzedawca zrobił z tych cukierków mieszankę, w taki sposób, że sprzedając tę mieszankę nic nie zyskuje i nic nie traci. Kilogram mieszanki kosztuje 20 zł 80 groszy. Ile dekagramów cukierków czekoladowych i ile dekagramów cukierków owocowych jest w kilogramie tej mieszanki? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Przykładowe rozwiązanie:

x – masa cukierków czekoladowych w 1 kg mieszanki

$1-x$ – masa cukierków owocowych w 1 kg mieszanki

$26x+18(1-x)=20{,}8$

$26x+18-18x=20{,}8$

$8x=2{,}8$

$x=0{,}35\ (kg)$

$1-x=0{,}65\ (kg)$

Odp.: W kilogramie tej mieszanki jest 35 dag cukierków czekoladowych i 65 dag cukierków owocowych.

Klucz punktowania:

1 punkt – uczeń poprawnie oznacza niewiadomą.

1 punkt – uczeń układa poprawne równanie.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązywania równania.

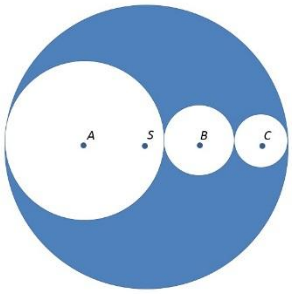
1 punkt – uczeń poprawnie oblicza, że w 1 kg mieszanki jest 0,35 kg (35 dag) cukierków czekoladowych.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza, że w 1 kg mieszanki jest 0,65 kg (65 dag) cukierków owocowych.

1 punkt – uczeń podaje masę każdego rodzaju cukierków we wskazanej jednostce (35 dag cukierków czekoladowych i 65 dag cukierków owocowych).

Zadanie 10. (0-8)

W kole o środku w punkcie *S* narysowano trzy koła o środkach odpowiednio w punktach *A, B* i *C*. Koło o środku w punkcie *A* jest styczne wewnętrznie do koła o środku w punkcie *S* i styczne zewnętrznie do koła o środku w punkcie *B*. Koło o środku w punkcie *C* jest styczne wewnętrznie do koła o środku w punkcie *S* i styczne zewnętrznie do koła o środku w punkcie *B*. Punkty *A, S, B* i *C* leżą na jednej prostej. Wiadomo, że promień koła o środku w punkcie *B* jest o 0,5 *cm* większy niż promień koła o środku w punkcie *C*, $|AS| = 3{,}5\,cm$ oraz $|AC| = 10\,cm$. Oblicz pole zamalowanej części koła o środku w punkcie *S* (zobacz rysunek). Zapisz konieczne obliczenia.



Przykładowe rozwiązanie:

Oznaczmy:

r_S –promień koła o środku w punkcie *S*.

r_A –promień koła o środku w punkcie *A*.

r_B –promień koła o środku w punkcie *B*.

r_C –promień koła o środku w punkcie *C*.

d - średnica koła o środku w punkcie *S.*

Wiadomo, że:

$|AS| = 3{,}5\,cm$

$|AC| = r_A + 2r_B + r_C = 10\,cm$

$r_B - r_C = 0{,}5\,cm$

Zauważmy, że: $r_S = r_A + |AS|$,

czyli

$d = 2(r_A + |AS|) = 2r_A + 2|AS| = 2r_A + 7\,cm$

oraz

$d = 2r_A + 2r_B + 2r_C = 2r_A + 2(r_B + r_C)$.

Stąd: $2(r_B + r_C) = 7cm$.

$r_B + r_C = 3{,}5\,cm$.

Zatem $r_B + r_C = 3{,}5\,cm$ oraz $r_B - r_C = 0{,}5\,cm$,

czyli

$r_B = 2\,cm$,

$r_C = 1{,}5\,cm$,

$r_A = 10\,cm - 2 \cdot 2cm - 1{,}5\,cm = 4{,}5\,cm,$

$r_S = 4{,}5\,cm + 3{,}5\,cm = 8\,cm.$

Pole koła o środku o środku w punkcie *S*: $P_s = 64\pi\ cm^2$.

Pole koła o środku o środku w punkcie *A*: $P_A = 20{,}25\pi\ cm^2$.

Pole koła o środku o środku w punkcie *B*: $P_B = 4\pi\ cm^2$.

Pole koła o środku o środku w punkcie *C*: $P_C = 2{,}25\pi\ cm^2$.

$P = 64\pi\ cm^2 - (20{,}25\pi\ cm^2 + 4\pi\ cm^2 + 2{,}25\pi\ cm^2) = 37{,}5\pi\ cm^2.$

Pole zamalowanej części koła o środku w punkcie *S* jest równe $37{,}5\pi\ cm^2$.

Klucz punktowania:

1 punkt – uczeń zauważa, że $d = 2r_A + 2r_B + 2r_C$ oraz $d = 2(r_A + |AS|)$

1 punkt – uczeń stwierdza, że $r_B + r_C = 3{,}5\,cm$.

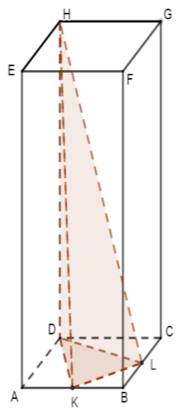
2 punkty – uczeń poprawnie oblicza długości promieni kół ($r_A = 4{,}5, r_B = 2, r_c = 1{,}5, r_S = 8$) (1 punkt jeśli uczeń popełni błąd rachunkowy).

2 punkty – uczeń poprawnie oblicza pola kół ($P_s = 64\pi\ cm^2$, $P_A = 20{,}25\pi\ cm^2$, $P_B = 4\pi\ cm^2$, $P_C = 2{,}25\pi\ cm^2$) (1 punkt jeśli uczeń popełni błąd rachunkowy).

2 punkty – uczeń poprawnie oblicza, że pole zamalowanej części koła o środku w punkcie *S* jest równe $37{,}5\pi\ cm^2$ (1 punkt jeśli uczeń nie poda jednostki lub zapisze błędną jednostkę).

Zadanie 11. (0-8)

Krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka prostopadłościanu $ABCDEFGH$ mają długości: 4 cm, 4 cm, 12 cm. Wiadomo, że $|AB| = |BC|$ oraz że punkty *K* i *L* są odpowiednio środkami krawędzi AB i BC (zobacz rysunek). Oblicz objętość i pole powierzchni ostrosłupa $KLDH$. Zapisz konieczne obliczenia.



Przykładowe rozwiązanie:

Obliczamy pole powierzchni podstawy ostrosłupa.

I sposób

$$|KL| = 2\sqrt{2}$$

$$|DK| = |DL| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ (cm)$$

Trójkąt *DKL* jest równoramienny. Wysokość tego trójkąta jest równa:

$$h_{DKL} = \sqrt{20 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$P_{DKL} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 6\,(cm^2)$$

II sposób

$$P_{ADK} = P_{LCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

$$P_{KBL} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$P_{ABCD} = 16$$

$$P_{DKL} = 16 - (4 + 4 + 2) = 6\,(cm^2)$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 12 = 24\,(cm^3)$$

Obliczamy pola powierzchni trójkątów *DKH* i *DLH*.

$$P_{DKH} = P_{DLH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 12 = 12\sqrt{5}\,(cm^2)$$

Trójkąt *KHL* jest równoramienny. Obliczamy długość ramienia i wysokość tego trójkąta.

$$|KH| = |LH| = \sqrt{20 + 144} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}\,(cm)$$

$$h_{KHL} = \sqrt{164 - 2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}\,(cm)$$

Obliczamy pole powierzchni trójkąta *KLH*.

$$P_{KLH} = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 18\,(cm^2)$$

Obliczamy pole powierzchni ostrosłupa:

$$P_{DKLH} = 6 + 2 \cdot 12\sqrt{5} + 18 = 24 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)(cm^2)$$

<u>Klucz punktowania:</u>

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola powierzchni podstawy ostrosłupa.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia objętości ostrosłupa.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola powierzchni trójkątów *DKH* i *DLH.*

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola powierzchni trójkąta *KLH*.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola powierzchni ostrosłupa.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość ostrosłupa.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole powierzchni ostrosłupa.

1 punkt – uczeń zapisuje poprawne jednostki pola powierzchni i objętości.

Zadanie 12. (0-4)

W stołówce, przy okrągłym stole jest 8 krzeseł.

a) Cztery osoby chcą usiąść przy tym stole. Na ile sposobów można im przydzielić miejsca? Odpowiedź uzasadnij.
b) Dwie osoby chcą usiąść przy tym stole, ale tak, aby zawsze między nimi przynajmniej jedno krzesło było puste. Na ile sposobów można im przydzielić miejsca? Odpowiedź uzasadnij.

Przykładowe rozwiązanie:

a) Pierwszej osobie można przydzielić jedno z ośmiu krzeseł, czyli jest osiem możliwości przydzielenia krzesła pierwszej osobie. Do każdej z tych możliwości, drugiej osobie można przydzielić jedno z 7 wolnych krzeseł. Zatem dwóm osobom można przydzielić krzesła na $8 \cdot 7 = 56$ sposobów. Do każdej z tych możliwości trzeciej osobie można przydzielić jedno z 6 wolnych krzeseł. Zatem trzem osobom można przydzielić krzesła na $56 \cdot 6 = 336$ sposobów. Do każdej z tych możliwości czwartej osobie można przydzielić jedno z 5 wolnych krzeseł. Zatem czterem osobom można przydzielić krzesła na $336 \cdot 5 = 1680$ sposobów.

b) I sposób

Miejsce drugiej osoby / Miejsce pierwszej osoby	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X	X	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	X
2	X	X	X	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)
3	(3,1)	X	X	X	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)
4	(4,1)	(4,2)	X	X	X	(4,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	X	X	X	(5,7)	(5,8)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	X	X	X	(6,8)
7	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	X	X	X
8	X	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	X	X

W ten sposób można dwóm osobom przy tym stole przydzielić krzesła na 40 sposobów.

II sposób
Pierwszej osobie można przydzielić jedno z ośmiu krzeseł. Drugiej osobie nie można przydzielić już zajętego krzesła, ani sąsiadujących bezpośrednio krzeseł z prawej i lewej strony zajętego krzesła. Zatem do każdej z możliwości przydzielenia krzesła pierwszej osobie, drugiej osobie można przydzielić jedno z 5 krzeseł. Ponieważ $8 \cdot 5 = 40$ więc jest 40 sposobów przydzielenia krzeseł dwóm osobom we wskazany sposób.

Klucz punktowania:

a) 1 punkt – uczeń podaje, że przy tym stole czterem osobom można przydzielić krzesła na 1680 sposobów.
1 punkt – uczeń poprawnie uzasadnia wynik.

b) 1 punkt – uczeń podaje, że można na 40 sposobów przydzielić przy tym stole krzesła dwóm osobom tak, aby zawsze między tymi osobami przynajmniej jedno krzesło było puste.
1 punkt – uczeń poprawnie uzasadnia wynik.